8. Algebra strukturnih blok dijagrama i Mejsonovo pravilo

Podsetnik sa predavanja:

- U složenijim slučajevima, graf toka signala i njegova algebra dovodi lakše do rešenja.
- *Izvorom* grafa toka signala naziva se čvor iz koga isključivo polaze (izviru) grane.
- *Ponorom* se naziva čvor grafa u kome se grane isključivo završavaju (poniru).
- *Putanjom* se naziva lančanica u istom smeru orjentisanih grana između bilo koja dva čvora.
- *Direktna putanja* je putanja duž koje se nijedna grana ne ponavlja.
- *Zatvorena putanja* je putanja koja izvire i ponire u istom čvoru, duž koje se nijedna grana ne ponavlja.
- *Sopstvena zatvorena putanja* je zatvorena putanja samo od jedne grane.
- Grane/putanje se kvantifikuju pojačanjem grana/putanja.
- Pojačanje zatvorenih putanja naziva se *kružno pojačanje*.
- Pojačanje putanja se dobija proizvodom pojačanja grana sadržanih u datoj putanji.

Mejsonovo pravilo:

Funkcija spregnutog prenosa sistema je:

$$W(s)=\frac{C(s)}{U(s)}=\frac{1}{\Delta(s)}\sum_{i=1}^{m}P_{di}(s)\Delta_i(s)$$

$P_{di}(s)$ - pojačanje i-te direktne putanje;

$\Delta(s)$ - determinanta sistema:

$$\Delta(s)=1-\sum_{j}P_j+\sum_{i,j}P_iP_j-\sum_{i,j,k}P_iP_jP_k+\ldots$$

P_j - kružno pojačanje j-te zatvorene koture;

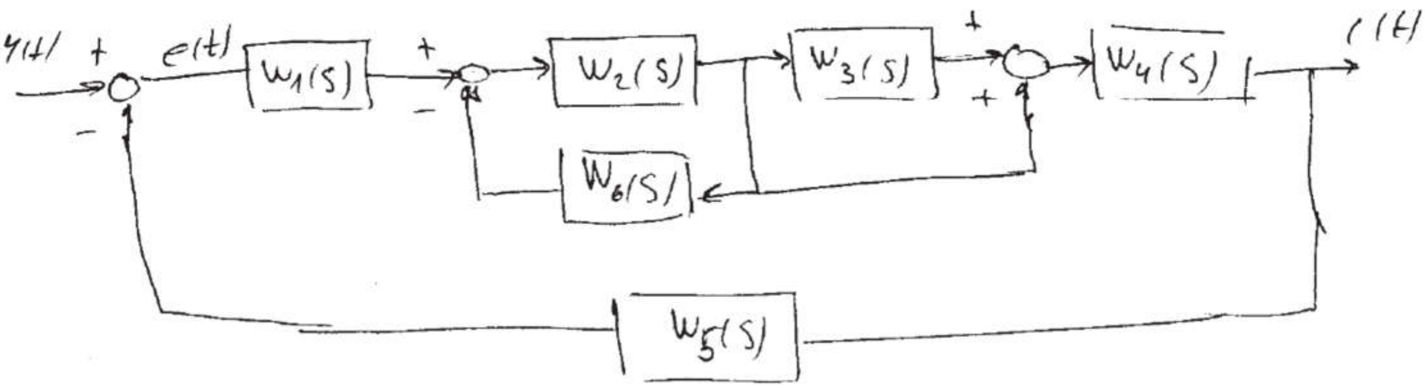
$\sum_{j}P_j$ - suma kružnih pojačanja svih zatvorenih kontura u grafu;

$\sum_{i,j}P_iP_j$ - suma proizvoda kružnih pojačanja od po dve zatvorene kružne konture koje se međusobno ne dodiruju;

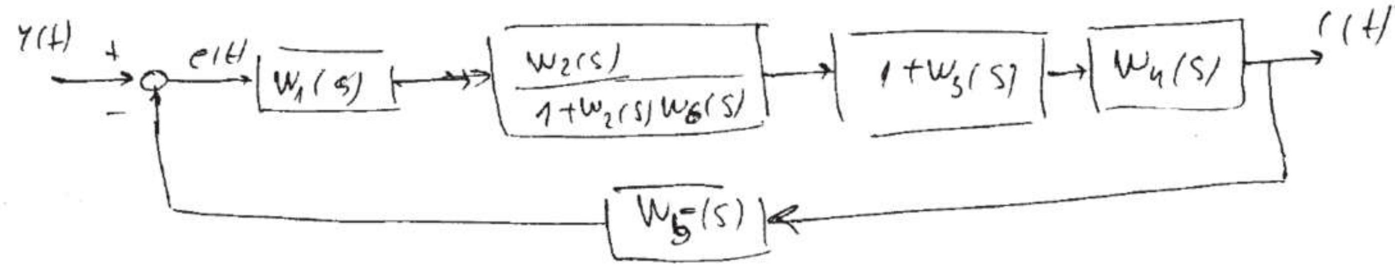
$\sum_{i,j,k}P_iP_jP_k$ - suma proizvoda kružnih pojačanja od po tri zatvorene kružne konture koje se međusobno ne dodiruju...

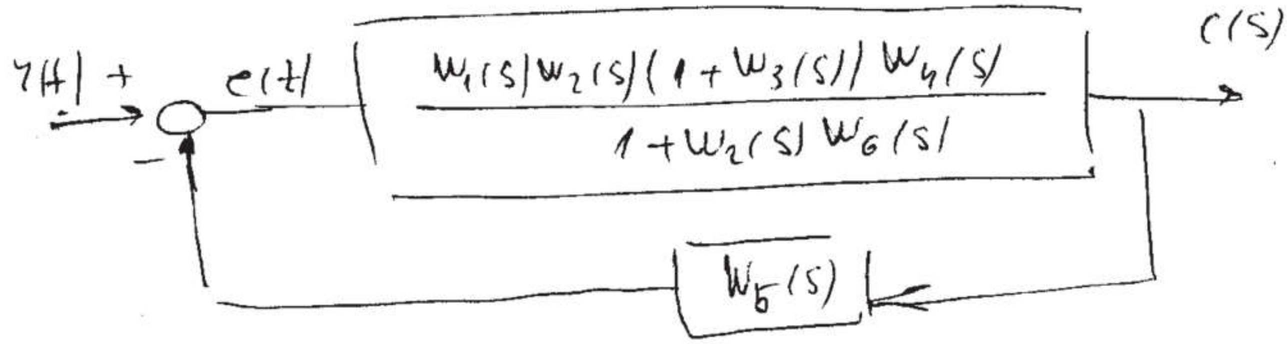
$\Delta_i(s)$ - determinanta sistema kada se i-ta direktna putanja ukloni.

8.1. Na slici je data strukturna blok šema SAU. Uprostiti je.



Rešenje:

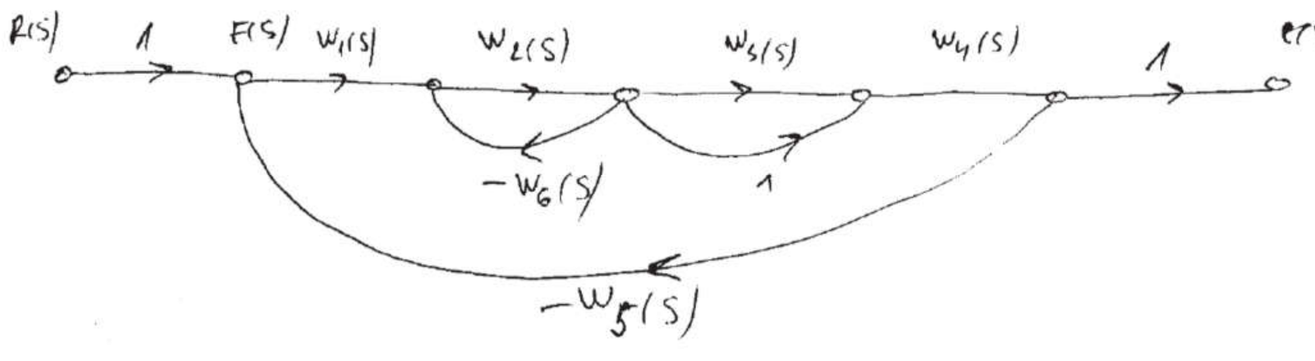




$$W_p(s)=\frac{W_1(s)W_2(s)\left[1+W_3(s)\right]W_4(s)W_5(s)}{1+W_2(s)W_6(s)};\quad W_d(s)=\frac{W_1(s)W_2(s)\left[1+W_3(s)\right]W_4(s)}{1+W_2(s)W_6(s)};\quad W_s(s)=\frac{W_d(s)}{1+W_p(s)};$$

$$W_s(s)=\frac{\dfrac{W_1(s)W_2(s)\left[1+W_3(s)\right]W_4(s)}{1+W_2(s)W_6(s)}}{1+\dfrac{W_1(s)W_2(s)\left[1+W_3(s)\right]W_4(s)W_5(s)}{1+W_2(s)W_6(s)}}=\frac{W_1(s)W_2(s)\left[1+W_3(s)\right]W_4(s)}{1+W_2(s)W_6(s)+W_1(s)W_2(s)\left[1+W_3(s)\right]W_4(s)W_5(s)}$$

$$W_e(s)=\frac{1}{1+W_p(s)}=\frac{1+W_2(s)W_6(s)}{1+W_2(s)W_6(s)+W_1(s)W_2(s)\left[1+W_3(s)\right]W_4(s)W_5(s)}$$



$$\Delta=1-\left[-W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)W_5(s)-W_1(s)W_2(s)W_4(s)W_5(s)-W_2(s)W_6(s)\right]$$

$p_1=W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)$; $\Delta_1=1$; $p_2=W_1(s)W_2(s)W_4(s)$; $\Delta_2=1$;

$$W_s(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{p_1\Delta_1+p_2\Delta_2}{\Delta}$$

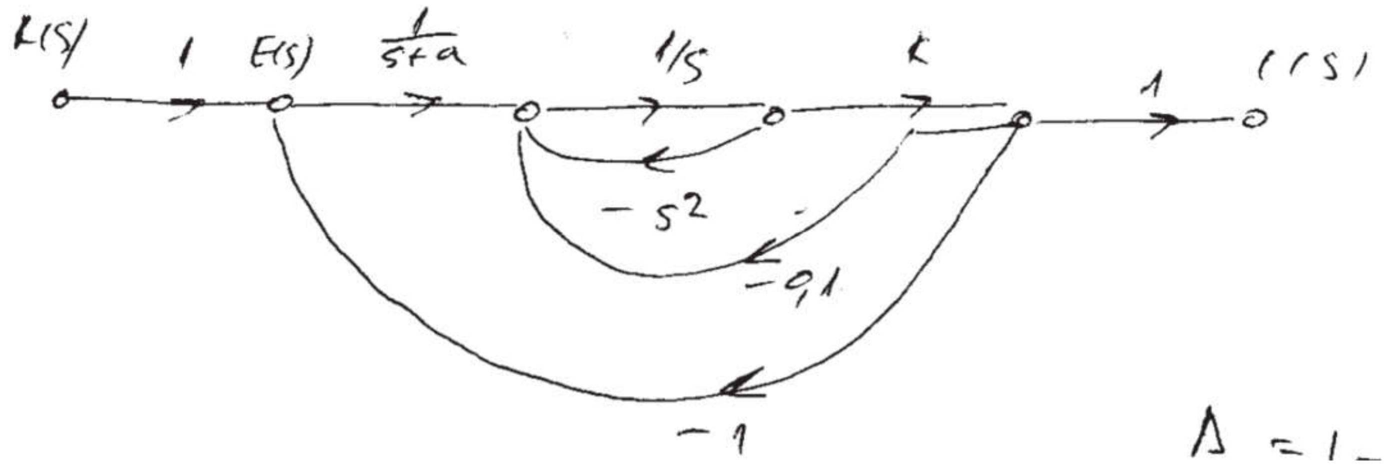
Određivanje f-je povratnog prenosa $W_p(s)$:

$$W_p(s)=W_d(s)W_5(s);\quad W_d(s)=\frac{W_p(s)}{W_5(s)};\quad W_s(s)=\frac{W_d(s)}{1+W_p(s)}=\frac{1}{W_5(s)}\frac{W_p(s)}{1+W_p(s)}$$

$$W_p(s)=\frac{W_5(s)W_s(s)}{1-W_5(s)W_s(s)}$$

8.2. Na slici je dat graf toka signala SAU.

a) Odrediti funkciju spregnutog prenosa Mejsonovim pravilom
b) Nacrtati strukturnu blok šemu
c) Odrediti vrednosti parametra *a* tako da sistem u ustaljenom stanju, pri odskočnom odzivu, ima grešku manju od 1%.



Rešenje:

a)

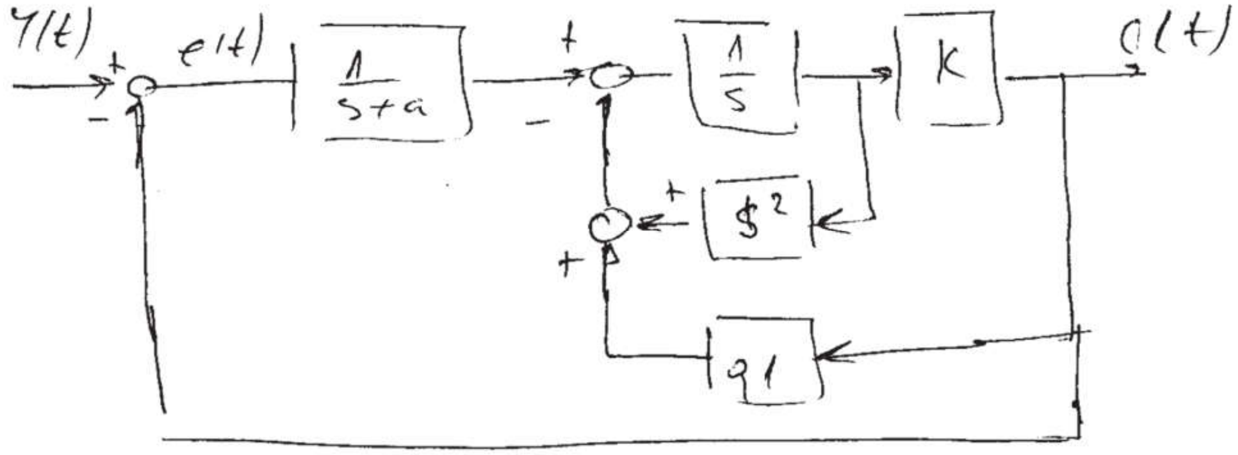
$$\Delta = 1 - \left[-s - \frac{0.1k}{s} - \frac{k}{s(s+a)} \right]; \quad p_1 = \frac{k}{s(s+a)}\ ; \quad \Delta_1 = 1\ ;$$

$$W_s(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{p_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{k}{s(s+a)\left[1 + s + \frac{0.1k}{s} + \frac{k}{s(s+a)}\right]}$$

$$W_s(s) = \frac{k}{s(s+a) + s^2(s+a) + 0.1k(s+a) + k} = \frac{k}{(s+a)(s^2 + s + 0.1k) + k}$$

$$W_p(s) = \frac{W_s(s)}{1 - W_s(s)} = \frac{k}{(s+a)(s^2 + s + 0.1k)}$$

b)



$$W_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+W_p(s)}\Rightarrow E(s)=\frac{1}{1+W_p(s)}R(s)$$

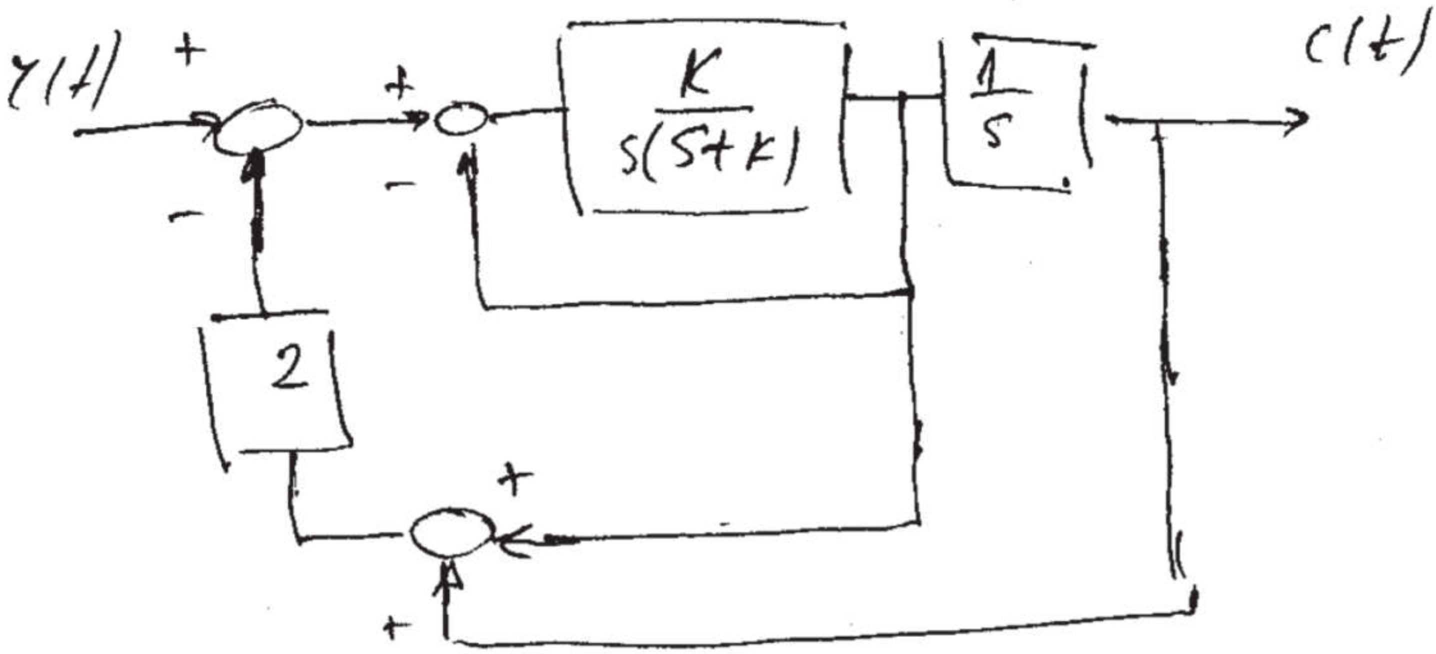
$$R(s)=L\{r(t)\}=L\{h(t)\}=\frac{1}{s}$$

c) $$E(s)=\frac{1}{1+\frac{k}{(s+a)(s^2+s+0.1k)}}\frac{1}{s}\quad;\quad \lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)$$

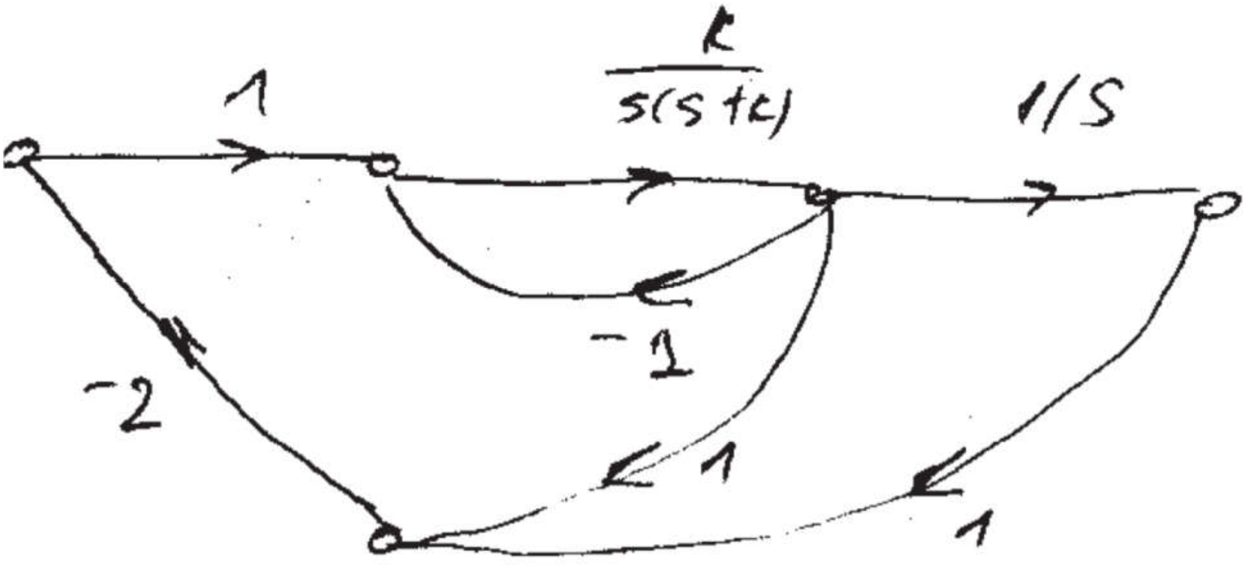
$$\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+\frac{k}{(s+a)(s^2+s+0.1k)}}=\frac{1}{1+\frac{k}{0.1a\cdot k}}=\frac{1}{1+\frac{1}{0.1a}}=\frac{0.1a}{1+.01a}\le 0.01$$

$$a\le 0.101$$

8.3. Odrediti karakteristične funkcije SAU čija je strukturna blok šema data na slici:



Rešenje:



$$\Delta = 1 - \left(-\frac{k}{s(s+k)} - \frac{2k}{s(s+k)} - \frac{2k}{s^2(s+k)} \right) = \frac{s^3 + s^2k + 3ks + 2k}{s^2(s+k)}$$

$$p_1 = \frac{k}{s^2(s+k)} \ ; \quad \Delta_1 = 1$$

$$W_s(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{p_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{\dfrac{k}{s^2(s+k)}}{\dfrac{s^3+s^2k+3ks+2k}{s^2(s+k)}} = \frac{k}{s^3+s^2k+3ks+2k}$$

$W_p(s) = ?$

$f(s) = \Delta = 0$ - karakteristična jednačina

$$f(s) = s^3 + s^2k + 3ks + 2k = 0$$

$$f(s) = 1 + W_p(s) \ ; \quad W_p(s) = k\frac{P(s)}{Q(s)} \Rightarrow f(s) = Q(s) + kP(s) = 0$$

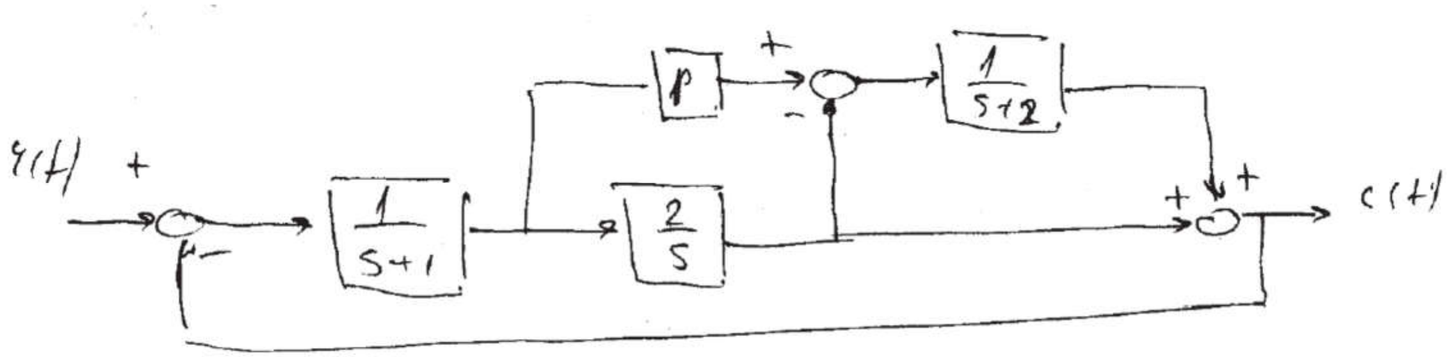
$$f(s) = s^3 + k\left(s^2 + 3s + 2\right) \Rightarrow Q(s) = s^3 \ ; \quad P(s) = s^2 + 3s + 2 \Rightarrow$$

$$W_p(s) = k\frac{s^2+3s+2}{s^3}$$

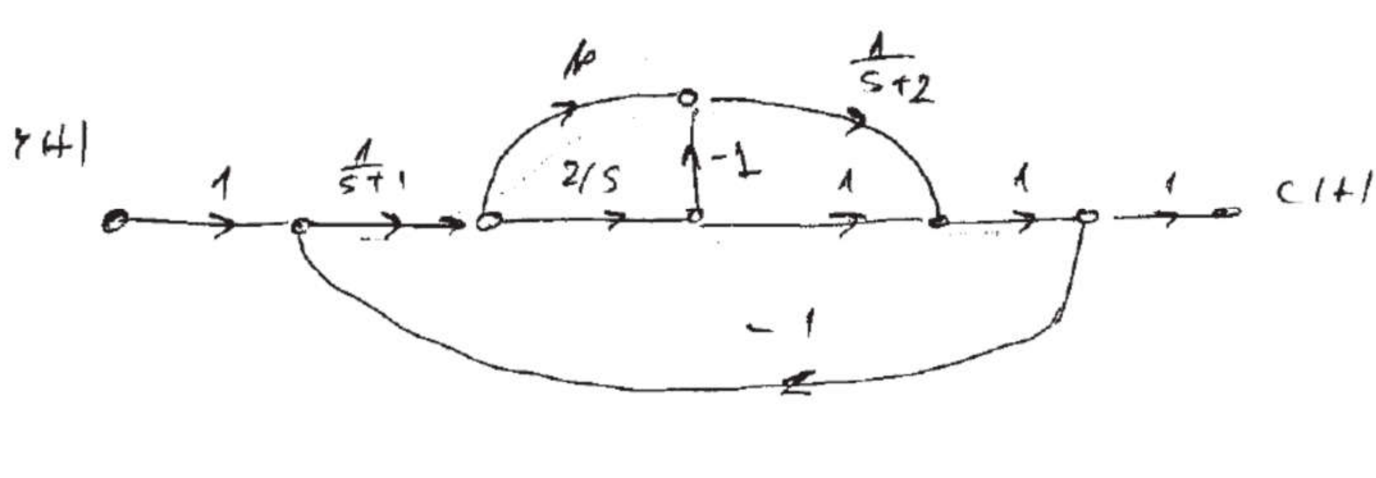
$W_e(s) = ?$

$$W_e(s) = \frac{1}{1+W_p(s)} = \frac{1}{1+k\dfrac{s^2+3s+2}{s^3}} = \frac{s^3}{s^3 + k\left(s^2+3s+2\right)}$$

8.4. Odrediti karakteristične funkcije SAU čija je strukturna blok šema data na slici:



Rešenje:



$$\Delta = 1 - \left(-\frac{p}{(s+1)(s+2)} + \frac{2}{s(s+1)(s+2)} - \frac{2}{s(s+1)} \right) = \frac{s^3 + 3s^2 + (4+p)s + 2}{s(s+1)(s+2)}$$

$$p_1 = \frac{2}{s(s+1)} \; ; \; \Delta_1 = 1 \; ; \; p_2 = -\frac{2}{s(s+1)(s+2)} \; ; \; \Delta_2 = 1 \; ; \; p_3 = \frac{p}{(s+1)(s+2)} \; ; \; \Delta_3 = 1 \; ;$$

$$W_s(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{p_1\Delta_1 + p_2\Delta_2 + p_3\Delta_3}{\Delta} = \frac{\dfrac{2s+4-2+ps}{\cancel{s(s+1)(s+2)}}}{\dfrac{s^3+3s^2+(4+p)s+2}{\cancel{s(s+1)(s+2)}}} = \frac{(2+p)s+2}{s^3+3s^2+(4+p)s+2}$$

$W_p(s) = ?$

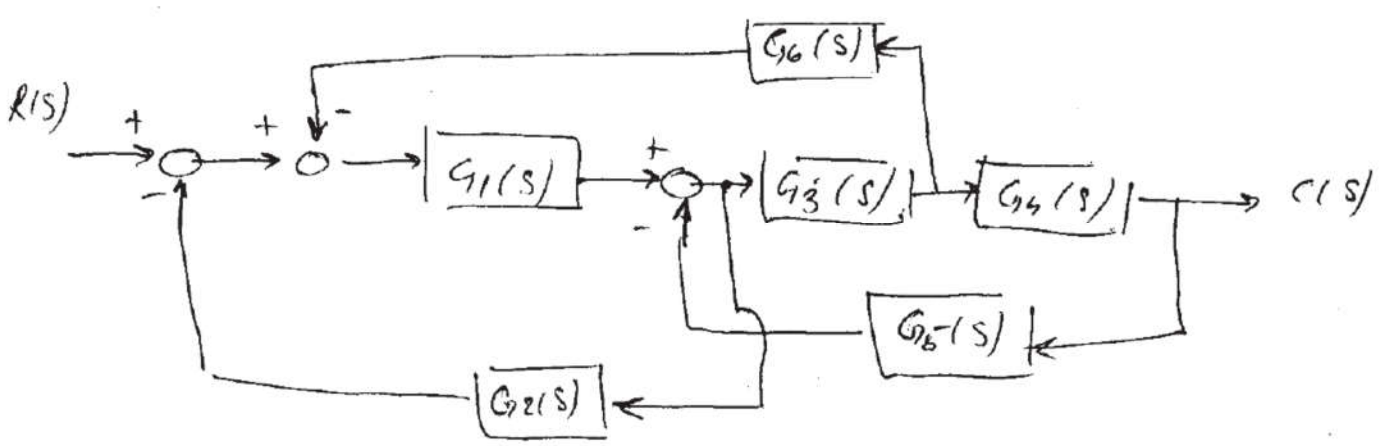
$$W_p(s) = \frac{W_s(s)}{1 - W_s(s)} = \frac{\dfrac{(2+p)s+2}{s^3+3s^2+(4+p)s+2}}{1 - \dfrac{(2+p)s+2}{s^3+3s^2+(4+p)s+2}} \Rightarrow W_p(s) = \frac{(2+p)s+2}{s^3+3s^2+2s}$$

$W_e(s) = ?$

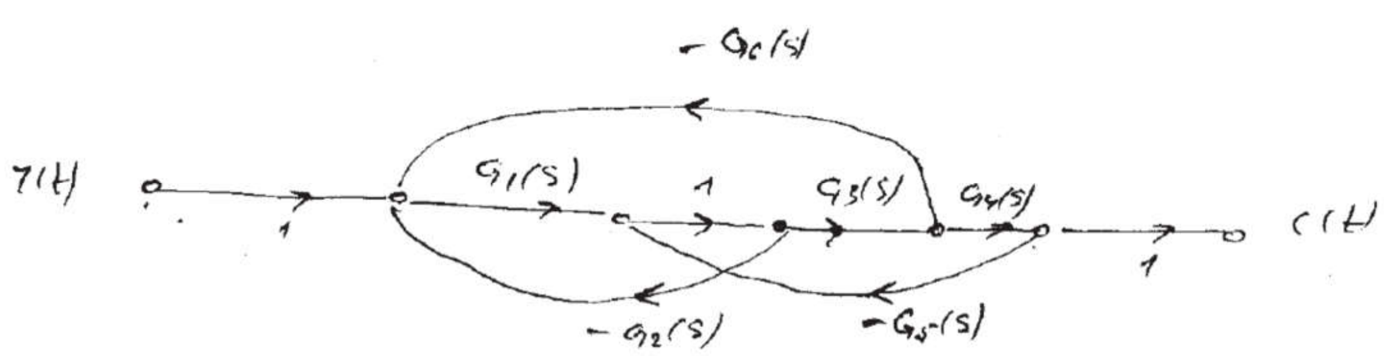
$$W_e(s) = \frac{1}{1 + W_p(s)} = \frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+(4+p)s+2}$$

8.5. Na slici je prikazan SBD SAU. Nacrtati graf toka signala. Naći funkcije spregnutog i povratnog prenosa i odrediti red astatizma sistema ukoliko je poznato:

$G_1(s) = k,\ G_2(s) = \dfrac{1}{s+3},\ G_3(s) = \dfrac{10}{s(s+5)},\ G_4(s) = \dfrac{s+5}{s+3},\ G_5(s) = 0.1s,\ G_6(s) = 0.1G_4(s).$ Ukoliko se na ulaz dovede jedinični nagibni signal, odrediti vrednost pojačanja *k* tako da greška u stacionarnom stanju bude jednaka 0.1.



Rešenje:



$$\Delta = 1-\left(-G_1(s)G_2(s)-G_1(s)G_3(s)G_6(s)-G_3(s)G_4(s)G_5(s)\right)=$$

$$1+\frac{k}{s+3}+\frac{10k}{s\cancel{(s+5)}}\cdot 0.1\frac{\cancel{s+5}}{s+3}+\frac{10}{\cancel{s}\cancel{(s+5)}}\frac{\cancel{s+5}}{s+3}\cdot 0.1\cancel{s}=1+\frac{k}{s+3}+\frac{k}{s(s+3)}+\frac{1}{s+3}$$

$$\Delta=\frac{s^2+3s+ks+k+s}{s(s+3)}=\frac{s^2+(4+k)s+k}{s(s+3)}$$

$$p_1=G_1(s)G_3(s)G_4(s)=\frac{10k}{s(s+3)}\ ;\quad \Delta_1=1$$

$$W_s(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{p_1\Delta_1}{\Delta}=\frac{\frac{10k}{\cancel{s(s+3)}}}{\frac{s^2+(4+k)s+k}{\cancel{s(s+3)}}}=\frac{10k}{s^2+(4+k)s+k}$$

$$W_p(s)=?$$

$$f(s)=\Delta=0 \text{ - karakteristična jednačina}$$

$$f(s)=s^2+(4+k)s+k=0$$

$$f(s)=1+W_p(s)\ ;\quad W_p(s)=k\frac{P(s)}{Q(s)}\Rightarrow f(s)=Q(s)+kP(s)=0$$

$$f(s)=s^2+4s+k(s+1)\Rightarrow Q(s)=s^2+4s\ ;\quad P(s)=s+1\Rightarrow$$

$$W_p(s)=k\frac{s+1}{s(s+4)}$$

$$e(\infty)=?$$

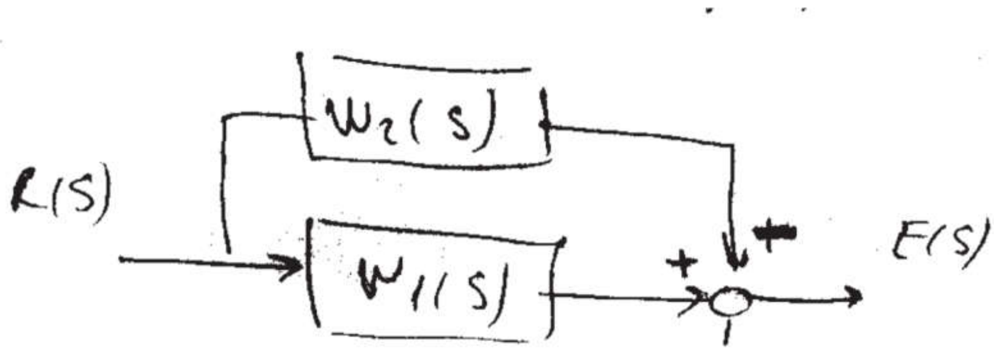
$$e(\infty)=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot W_e(s)\cdot R(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{1+W_p(s)}\cdot R(s)$$

$$r(t)=t\Rightarrow R(s)=L\{t\}=\frac{1}{s^2}$$

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{1+W_p(s)}\cdot\frac{1}{s^2}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sW_p(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sW_p(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{\cancel{s}k\frac{s+1}{\cancel{s}(s+4)}}$$

$$e(\infty)=\frac{1}{k\frac{1}{4}}=\frac{4}{k}\ \Rightarrow\ \frac{4}{k}=0.1\Rightarrow k=40$$

8.6. Na slici je prikazan SBD SAU. Nacrtati graf toka signala. Poznato je $W_1(s)=\frac{10}{s+10}$, dok je *W₂(s)* funkcija spregnutog prenosa sistema SAU sa jediničnom negativnom povratnom spregom, čija je f-ja prenosa direktne grane $W_d(s)=\frac{20}{s(s+20)}$. Odrediti oblik f-je prenosa sistema kojeg treba kaskadno vezati diskriminatoru sa slike, tako da vrednost signala greške na jediničnu nagibnu funkciju bude jednak nuli.



Rešenje:

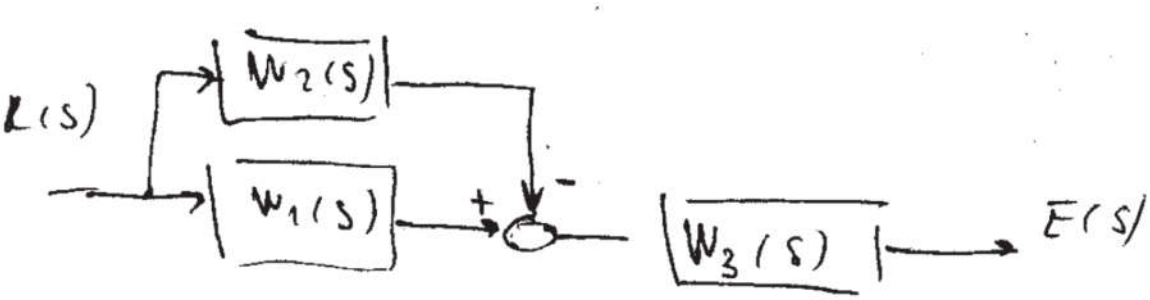
$$E(s)=\left[W_1(s)-W_2(s)\right]R(s)$$

$$W_2(s)=\frac{W_d(s)}{1+W_d(s)}=\frac{\frac{20}{s(s+20)}}{1+\frac{20}{s(s+20)}}=\frac{20}{s^2+20s+20}$$

$$E(s)=\left[\frac{10}{s+10}-\frac{20}{s^2+20s+20}\right]R(s)=\frac{10s(s+18)}{(s+10)(s^2+20s+20)}R(s)$$

$$r(t)=t\Rightarrow R(s)=L\{t\}=\frac{1}{s^2}\ \Rightarrow\ E(s)=10\frac{s+18}{s(s+10)(s^2+20s+20)}$$

Strukturna blok šema nakon uvođenja nove funkcije prenosa ima oblik:



$$E(s)=W_3(s)\left[W_1(s)-W_2(s)\right]R(s)=W_3(s)\cdot 10\frac{s+18}{s(s+10)(s^2+20s+20)}$$

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=\lim_{s\to 0}\not{s}\cdot W_3(s)\cdot 10\frac{s+18}{\not{s}(s+10)(s^2+20s+20)}$$

$$e(\infty)=0\Rightarrow\frac{18}{20}\lim_{s\to 0}W_3(s)=0\ \Rightarrow\ \lim_{s\to 0}W_3(s)=0$$

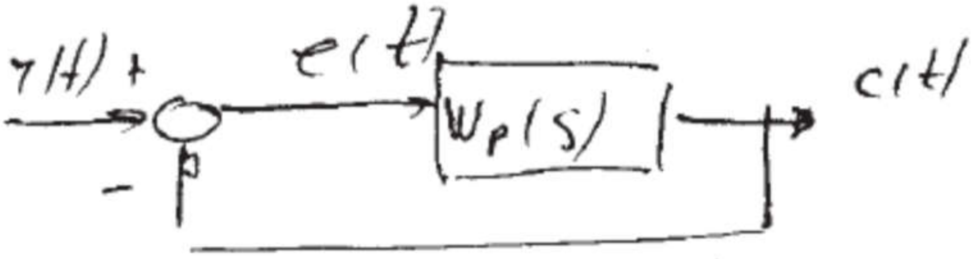
$$W_3(s)=k\frac{P(s)}{Q(s)}\Rightarrow\lim_{s\to 0}W_3(s)=\lim_{s\to 0}k\frac{P(s)}{Q(s)}=0\Rightarrow\lim_{s\to 0}P(s)=0\Rightarrow$$

$$P(s)=s^rP_0(s),\quad P_0(0)\neq 0$$

Svaka funkcija prenosa koja zadovoljava uslov $W_3(s)=k\frac{s^rP_0(s)}{Q(s)}$ gde je

$P_0(0)\neq 0\ \wedge\ Q_0(0)\neq 0$ je prihvatljiva. Npr. $W_3(s)=\frac{s}{s+1}$

8.7. Blok dijagram SAU prikazan je na slici. Odrediti tri varijante funkcije povratnog prenosa za koji važi da je greška na jedinični odskočni ulazni signal jednaka nuli u ustaljenom stanju, pri čemu karakteristični polinom ima oblik $f(s)=s^3+4s^2+6s+4$



$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot E(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot W_e(s)\cdot R(s)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+W_p(s)}\cdot R(s)$$

$$r(t)=h(t)\Rightarrow R(s)=L\{h(t)\}=\frac{1}{s}$$

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+W_p(s)}\cdot\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+W_p(s)}\ ;\quad W_p(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+\frac{P(s)}{Q(s)}}=\lim_{s\to 0}\frac{Q(s)}{Q(s)+P(s)}$$

$$e(\infty)=0\Rightarrow \lim_{s\to 0} Q(s)=0\ \Rightarrow\ Q(s)=s^r Q_0(s),\quad Q_0(s)\neq 0\ \Rightarrow\ W_p(s)=\frac{P(s)}{s^r Q_0(s)}$$

Ovo znači da funkcija povratnog prenosa mora imati astatizam. Stepen *r* u imeniocu predstavlja red astatizma. Pošto je karakteristični polinom trećeg stepena sledi da funkcija povratnog prenosa mora imati polinom trećeg stepena u imeniocu.

$$f(s)=1+W_p(s)=0\ ;\quad W_p(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}\Rightarrow f(s)=Q(s)+P(s)$$

$$\deg(Q(s))\geq\deg(P(s))\Rightarrow\deg(f(s))=\deg(Q(s))$$

$$1^o\quad W_p(s)=\frac{c}{s(s^2+as+b)}=\frac{P(s)}{Q(s)}\Rightarrow 1+W_p(s)=s^3+as^2+bs+c=0$$

$$f(s)=s^3+4s^2+6s+4=0\Rightarrow a=4,\ b=6,\ c=4\ \Rightarrow\ W_p(s)=\frac{4}{s(s^2+4s+6)}$$

$$2^o\quad W_p(s)=\frac{bs+c}{s^2(s+a)}=\frac{P(s)}{Q(s)}\Rightarrow 1+W_p(s)=s^3+as^2+bs+c=0$$

$$a=4,\ b=6,\ c=4\ \Rightarrow\ W_p(s)=\frac{6s+4}{s^2(s+4)}$$

$$3^o\quad W_p(s)=\frac{as^2+bs+c}{s^3}=\frac{P(s)}{Q(s)}\Rightarrow 1+W_p(s)=s^3+as^2+bs+c=0$$

$$a=4,\ b=6,\ c=4\ \Rightarrow\ W_p(s)=\frac{4s^2+6s+4}{s^3}$$