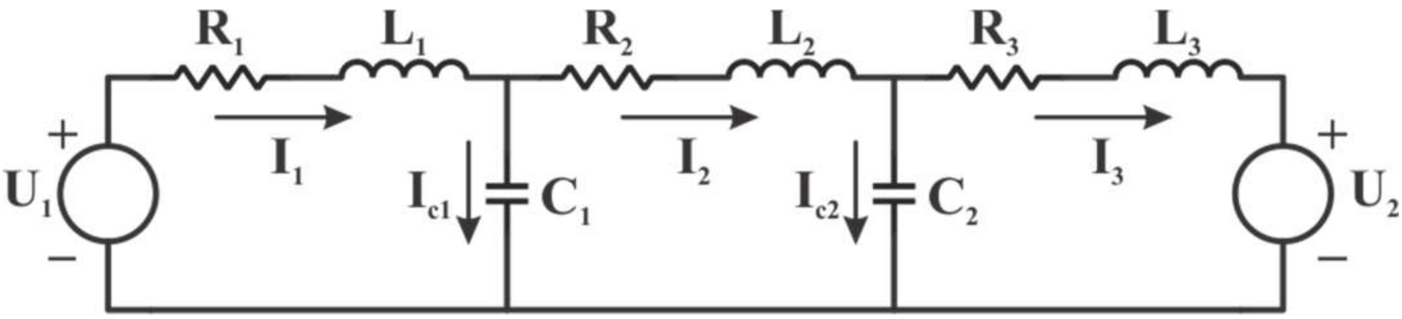
9. Prostor stanja sistema

9.1. Na slici je prikazan električan sistem. Formirati model u prostoru stanja ako su izlazi iz sistema sledeći naponi: U_{C1}, U_{C2}, U_{L2}, U_{L3}.



Rešenje:

Promenljive sanja su stuje kroz kalemove i naponi na kondenzatorima.

$$U_1 = R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + U_{C1} \qquad \frac{dI_1}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} I_1 - \frac{1}{L_1} U_{C1} + \frac{1}{L_1} U_1 \qquad x_1 = I_1 \qquad y_1 = U_{C1}$$

$$U_{C1} = R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + U_{C2} \qquad \frac{dI_2}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} I_2 + \frac{1}{L_2} U_{C1} - \frac{1}{L_2} U_{C2} \qquad x_2 = I_2 \qquad y_2 = U_{C2}$$

$$U_{C2} = R_3 I_3 + L_3 \frac{dI_3}{dt} + U_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dI_3}{dt} = -\frac{R_3}{L_3} I_3 + \frac{1}{L_3} U_{C2} - \frac{1}{L_3} U_2 \qquad x_3 = I_3 \qquad y_3 = U_{L2}$$

$$C_1 \frac{dU_{C1}}{dt} = I_1 - I_2 \qquad \frac{dU_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} I_1 - \frac{1}{C_1} I_2 \qquad x_4 = U_{C1} \qquad y_4 = U_{L3}$$

$$C_2 \frac{dU_{C2}}{dt} = I_2 - I_3 \qquad \frac{dU_{C2}}{dt} = \frac{1}{C_2} I_2 - \frac{1}{C_2} I_3 \qquad x_5 = U_{C2}$$

$$U_{L2} = L_2 \frac{dI_2}{dt} = -R_2 I_2 + U_{C1} - U_{C2}$$

$$U_{L3} = L_3 \frac{dI_3}{dt} = -R_3 I_3 + U_{C2} - U_2$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L_1} x_1 - \frac{1}{L_1} x_4 + \frac{1}{L_1} U_1 \qquad y_1 = x_4$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{R_2}{L_2} x_2 + \frac{1}{L_2} x_4 - \frac{1}{L_2} x_5 \qquad y_2 = x_5$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{R_3}{L_3} x_3 + \frac{1}{L_3} x_5 - \frac{1}{L_3} U_2 \qquad y_3 = -R_2 x_2 + x_4 - x_5$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{C_1} x_1 - \frac{1}{C_1} x_2 \qquad y_4 = -R_3 x_3 + x_5 - U_2$$

$$\dot{x}_5 = \frac{1}{C_2} x_2 - \frac{1}{C_2} x_3$$

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$y = D \cdot x + H \cdot u$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R_1}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & 0\\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & 0 & \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2}\\ 0 & 0 & -\frac{R_3}{L_3} & 0 & \frac{1}{L_3}\\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L_1} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{L_3}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{y}_1\\ \mathrm{y}_2\\ \mathrm{y}_3\\ \mathrm{y}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -R_2 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -R_3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\end{bmatrix}$$

9.2. Sistem je opisan sledećim jednačinama:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -3 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$c=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Odrediti funkciju prenosa sistema *G(s)*.

Rešenje:

$$\begin{matrix}\dot{x}=A\cdot x+B\cdot u\\ c=D\cdot x\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad G(s)=D\left[sI-A\right]^{-1}B$$

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & s & 0\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 2 & 3 & s+4\end{bmatrix}$$

$$\left[sI-A\right]^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}s^2+4s+3 & s+4 & 1\\ -2 & s^2+4s & s\\ -2s & -3s-2 & s^2\end{bmatrix}$$

$$\Delta=(-1)^{1+1}s\begin{vmatrix}s & -1\\ 3 & s+4\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}2\begin{vmatrix}-1 & 0\\ s & -1\end{vmatrix}=s^3+4s^2+3s+2$$

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{2\left(s^2+s+2\right)}{s^3+4s^2+3s+2} & \dfrac{2(1-s)}{s^3+4s^2+3s+2}\\ \dfrac{s^2+5s+2}{s^3+4s^2+3s+2} & \dfrac{s^2+5s+4}{s^3+4s^2+3s+2}\end{bmatrix}$$

9.1. Simulacija sistema i izbor promenljivih stanja na osnovu funkcije prenosa

9.1.1. Sistem je obisan diferencijalnom jednačinom: $\frac{d^2c(t)}{dt^2}+5\frac{dc(t)}{dt}+6c(t)=5u(t)$. Odrediti funkciju prenosa sistema $G(s)=\frac{C(s)}{U(s)}$ i pokazati da se različitim postupcima simulacije dobijaju različiti matematički modeli u prostoru stanja. Takođe demonstrirati da je funkcija prenosa dobijena na osnovu njih invarijantna na metod simualcije.

Rešenje:

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2}+5\frac{dc(t)}{dt}+6c(t)=5u(t)/\mathcal{L}$$

$$s^2C(s)+5sC(s)+6C(s)=5U(s)\Rightarrow G(s)=\frac{C(s)}{U(s)}=\frac{5}{s^2+5s+6}=\frac{5}{(s+2)(s+3)}$$

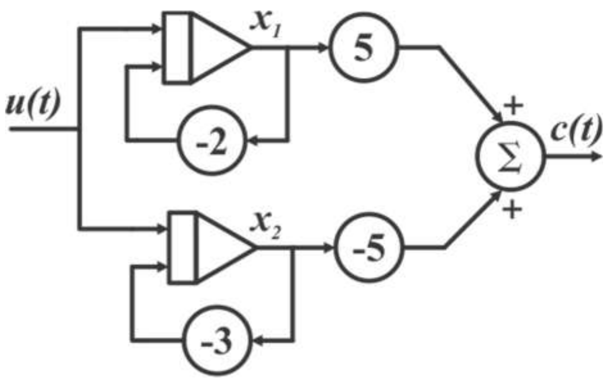
a) Paralelno programiranje

$$G(s)=\frac{5}{(s+2)(s+3)}=\frac{A}{(s+2)}+\frac{B}{(s+3)}$$

$$A=\lim_{s\to-2}\cancel{(s+2)}\frac{5}{\cancel{(s+2)}(s+3)}=5$$

$$B=\lim_{s\to-3}\cancel{(s+3)}\frac{5}{(s+2)\cancel{(s+3)}}=-5$$

$$G(s)=\frac{5}{(s+2)}-\frac{5}{(s+3)}$$



$$\dot{x}=A\cdot x+B\cdot u$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-2x_1+u\\ \dot{x}_2&=-3x_2+u\\ c&=5x_1-5x_2\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad A=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-3\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}5&-5\end{bmatrix};\ H=0$$

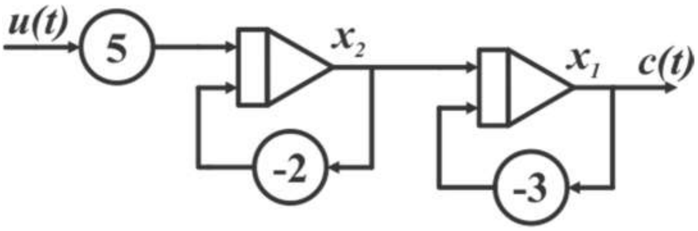
$$G(s)=D(sI-A)^{-1}B+H$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$G(s)=\begin{bmatrix} 5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\frac{5}{(s+2)(s+3)}$$

b) Redno programiranje

$$G(s)=\frac{5}{(s+2)(s+3)}=5\frac{1}{(s+2)}\cdot\frac{1}{(s+3)}$$



$$\begin{aligned} &\dot{x}=A\cdot x+B\cdot u \\ &\dot{x}_1=-3x_1+x_2 \\ &\dot{x}_2=-2x_2+5u \quad \Rightarrow \\ &c=x_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &A=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};\ H=0 \end{aligned}$$

$$G(s)=D(sI-A)^{-1}B+H$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$G(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}=\frac{5}{(s+2)(s+3)}$$

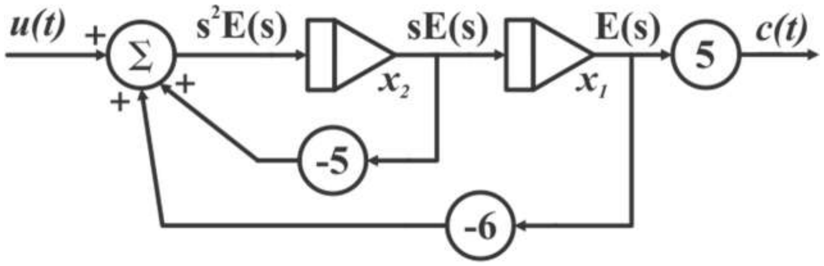
c) Direktno programiranje

$$G(s)=\frac{C(s)}{U(s)}=\frac{5}{s^2+5s+6}\cdot\frac{E(s)}{E(s)}$$

$$U(s)=(s^2+5s+6)E(s) \quad C(s)=5E(s)$$

$$s^2E(s)=-5sE(s)-6E(s)+U(s)$$

$$C(s)=5E(s)$$



$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -6x_1 - 5x_2 + u \quad \Rightarrow \\ c &= 5x_1 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix};\ H = 0$$

$$G(s) = D(sI - A)^{-1} B + H$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+5}{s^2+5s+6} & \frac{1}{s^2+5s+6} \\ \frac{-6}{s^2+5s+6} & \frac{s}{s^2+5s+6} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+5}{s^2+5s+6} & \frac{1}{s^2+5s+6} \\ \frac{-6}{s^2+5s+6} & \frac{s}{s^2+5s+6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5}{s^2+5s+6}$$

9.1.2. Dinamički sistem je opisan sa: $G(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2(s+3)^3(s+1)}$. Odrediti jednačinu stanja $\dot{x} = f(x,u)$ u Džordanovoj formi i odgovarajuću jednačinu izlaza $c = g(x,u)$.

Rešenje: Paralelno programiranje:

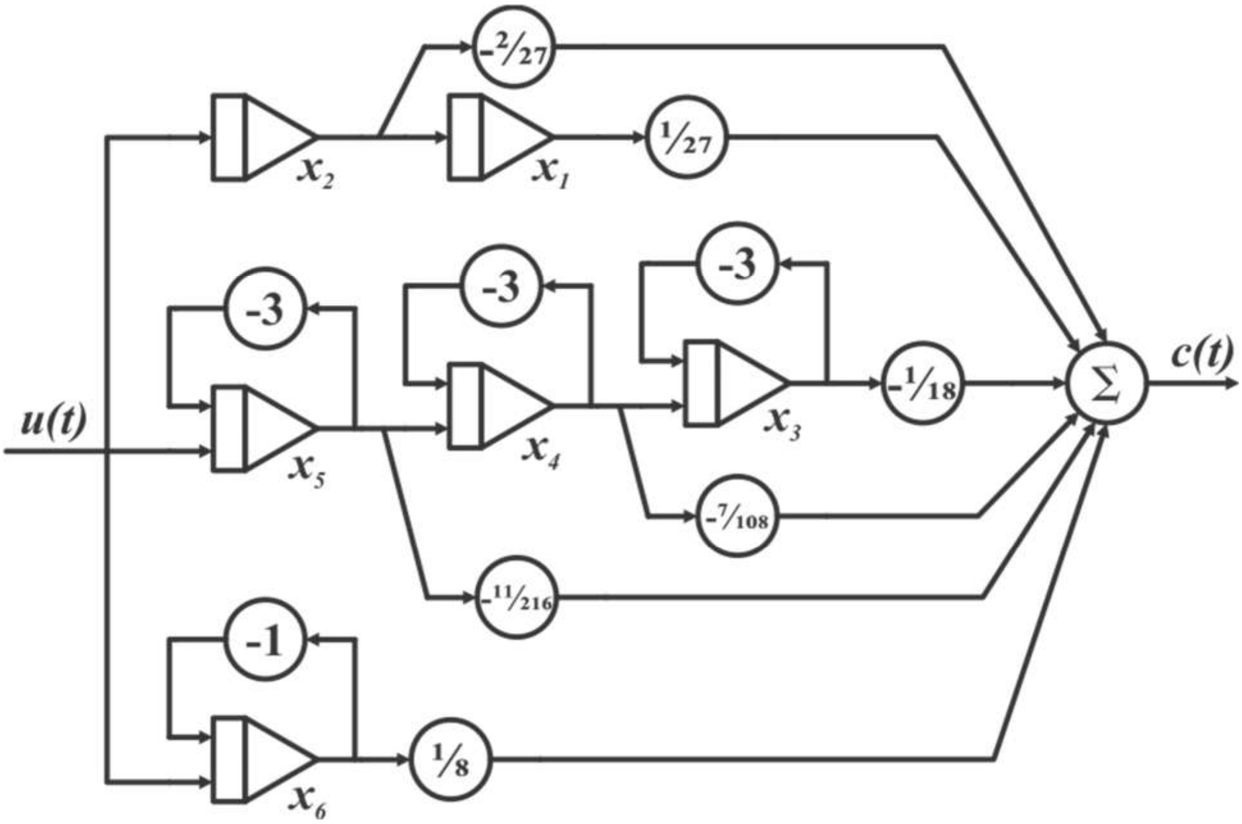
$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+3)^3(s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{(s+3)^3} + \frac{D}{(s+3)^2} + \frac{E}{s+3} + \frac{F}{s+1}$$

$$A = \lim_{s\to 0}\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{ds^0}\cancel{s^2}\frac{1}{\cancel{s^2}(s+3)^3(s+1)}\right] = \frac{1}{27} \qquad B = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{ds}\cancel{s^2}\frac{1}{\cancel{s^2}(s+3)^3(s+1)}\right] = -\frac{2}{27}$$

$$C = \lim_{s\to -3}\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{ds^0}\cancel{(s+3)^3}\frac{1}{s^2\cancel{(s+3)^3}(s+1)}\right] = -\frac{1}{18} \qquad D = \lim_{s\to -3}\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{ds}\cancel{(s+3)^3}\frac{1}{s^2\cancel{(s+3)^3}(s+1)}\right] = -\frac{7}{108}$$

$$E = \lim_{s\to -3}\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{ds^2}\cancel{(s+3)^3}\frac{1}{s^2\cancel{(s+3)^3}(s+1)}\right] = -\frac{11}{216} \qquad F = \lim_{s\to -1}\left[\cancel{(s+1)}\frac{1}{s^2(s+3)^3\cancel{(s+1)}}\right] = \frac{1}{8}$$

$$G(s) = \frac{1}{27}\frac{1}{s^2} - \frac{2}{27}\frac{1}{s} - \frac{1}{18}\frac{1}{(s+3)^3} - \frac{7}{108}\frac{1}{(s+3)^2} - \frac{11}{216}\frac{1}{s+3} + \frac{1}{8}\frac{1}{s+1}$$



$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u$$
$$\dot{x}_3 = -3x_3 + x_4$$
$$\dot{x}_4 = -3x_4 + x_5$$
$$\dot{x}_5 = -3x_5 + u$$
$$\dot{x}_6 = -x_6 + u$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{1}{27}x_1 - \frac{2}{27}x_2 - \frac{1}{18}x_3 - \frac{7}{108}x_4 - \frac{11}{216}x_5 + \frac{1}{8}x_6$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{27} & -\frac{2}{27} & -\frac{1}{18} & -\frac{7}{108} & -\frac{11}{216} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}; \quad H = 0$$

9.2. Svođenje matrice stanja sistema na kanonični oblik (dijagonalnu formu)

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$
$$c(t) = D \cdot x(t) + H \cdot u(t)$$

Uvodi se transformaciona matrica P pri čemu je: $x = P\hat{x}$

Matrica P se određuje iz izraza: $A \cdot P = P \cdot \hat{A}$; pri čemu je $\hat{A}$ željena dijagonalna matrica.

$\hat{D} = D \cdot P$; $\hat{B} = P^{-1} \cdot B$

Ukoliko je matrica *A* u kontrolabilnoj kaoničnoj (kompanjon) formi, onda je transformaciona matrica P unapred poznata i jednaka Vandermondovoj matrici (pod uslovom da su polovi prosti).

9.2.1. Odrediti transformacionu matricu *P* koja datu matricu A prevodi u dijagonalnu formu.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}$$

Rešenje: Matrica A je u kompanjon formi pa je matrica *P* jednaka Vandermondovoj matrici (ukoliko su sopstvene vrednosti proste i različite).

$$P=W \quad \det(\lambda I-A)=0 \quad [\lambda I-A]=\begin{bmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\6&11&\lambda+6\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=-1;\ \lambda_2=-2;\ \lambda_3=-3$$

$$P=W=\begin{bmatrix}1&1&1\\\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3\\\lambda_1^2&\lambda_2^2&\lambda_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-2&-3\\1&4&9\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-6&-5&-1\\6&8&2\\-2&-3&-1\end{bmatrix} \qquad \hat{A}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

9.3. Kretanje (trajektorija) sistema u prostoru stanja

$$x(t)=\phi(t)x(0)+\int_0^t\phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$c(t)=D\phi(t)x(0)+D\int_0^t\phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau+Hu(t)$$

$$\phi(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} \text{ - Fundamentalna matrica sistema}$$

9.3.1. Odrediti fundamentalnu matricu sistema i odziv sistema na Hevisajdov ulazni signal.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-x_1+u\\\dot{x}_2&=-2x_2+u\end{aligned} \qquad \begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\vec{0}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Rešenje:

$$A=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad \phi(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}$$

$$\phi(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1}&0\\0&\dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}e^{-1t}&0\\0&e^{-2t}\end{bmatrix}$$

Fundamentalna matrica sistema se može odrediti direktno iz matrice *A* zbog toga što je ova matrica u dijagonalnoj formi. Ona se određuje na osnovu sopstvenih vrednosti matrice *A* koje se dobijaju iz karakteristične jednačine

$$\det(\lambda I-A)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ \ldots\lambda_n \text{ pri čemu je } \lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3\neq\ldots\neq\lambda_n$$

$$\phi(t)=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Odziv sistema je:

$$x(t)=\phi(t)\,\cancel{x(0)}+\int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau=\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau)d\tau$$

$$u(t)=h(t)=1\Big|_0^t \quad \Rightarrow \quad x(t)=\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} \\ e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau=\begin{bmatrix} e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau \\ e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-t}e^{\tau}\Big|_0^t \\ e^{-2t}\frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_0^t \end{bmatrix}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix} 1-e^{-t} \\ \frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right) \end{bmatrix}; \quad c(t)=Dx(t)=D\begin{bmatrix} 1-e^{-t} \\ \frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right) \end{bmatrix}$$

9.3.2. Dinamički sistem upravljanja je opisan sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1+u \\ \dot{x}_2 &= x_1-2x_2 \\ c &= 4x_2 \end{aligned}$$

Odrediti normalni odskočni odziv sistema.

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad D=\begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Rešenje: Postoje dva načina za rešavanje ovog zadatka.

1. način: Primenom istog postupka kao u prethodnom zadatku:

$$x(t)=\phi(t)x(0)+\int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau; \quad c(t)=Dx(t)+Hu(t); \quad \phi(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}$$

2. način: Svođenje matrice *A* na dijagonalnu (Džordanovu) formu.

$$AP = P\hat{A} \quad \text{pri čemu je } \hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \hat{A} = P^{-1}AP$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -p_{11} & -p_{12} \\ p_{11}-2p_{21} & p_{12}-2p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{11} & -2p_{12} \\ -p_{21} & -2p_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -p_{11} = -p_{11} \\ -p_{12} = -2p_{12} \\ p_{11}-2p_{21} = -p_{21} \\ p_{12}-2p_{22} = -2p_{22} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad \begin{matrix} p_{12} = 0 \\ p_{11} \text{ i } p_{22} \text{ se može izabrati proizvoljno} \\ \text{Mi biramo: } p_{11} = 1 \text{ i } p_{22} = 1 \\ 1-2p_{21} = -p_{21} \Rightarrow \quad p_{21} \end{matrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistem je sada opisan sa:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$c = \hat{D}\hat{x} + Hu \quad H = 0 \qquad \hat{D} = DP = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Normalni odskočni odziv je:

$$\hat{x}(t) = \hat{\phi}(t)\hat{x}(0) + \int_0^t \hat{\phi}(t-\tau)\hat{B}u(\tau)d\tau \quad u(t) = h(t) = 1\Big|_0^t \quad \hat{x}(0) = P^{-1}x(0)$$

$\hat{\phi}(t)$ je dijagonalna matrica zato što je $\hat{A}$ dijagonalna matica; $\mathrm{x}(0) = 0 \Rightarrow \hat{x}(0) = 0$

$$\hat{x}(t) = \int_0^t \hat{\phi}(t-\tau)\hat{B}d\tau = \int_0^t e^{\hat{A}(t-\tau)}\hat{B}d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}d\tau$$

$$\hat{x}(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} \\ -e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}d\tau = \begin{bmatrix} e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau \\ -e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}e^{\tau}\Big|_0^t \\ -e^{-2t}\frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_0^t \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 1-e^{-t} \\ -\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right) \end{bmatrix};$$ mi tražimo $x(t)$, i računamo ga iz $x(t) = P\hat{x}(t)$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-e^{-t} \\ -\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-e^{-t} \\ 1-e^{-t}-\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-e^{-t} \\ \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Izlaz sistema je: $c(t) = Dx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-e^{-t} \\ \frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} = 2-4e^{-t}+2e^{-2t} = 2\left(1-2e^{-t}+e^{-2t}\right)$

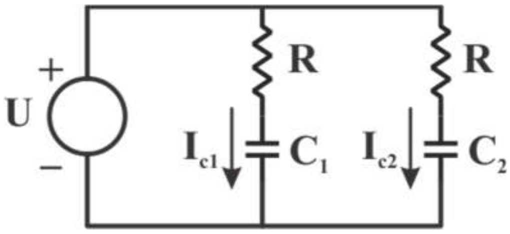
Isti rezultat se dobija i iz: $c(t) = \hat{D}\hat{x}(t)$

9.4 Kontrolabilnost i opservabilnost

Def: Sistem je potpuno kontrolabilan ukoliko postoji upravljanje *u(t)* koje će sistem iz nekog početnog stanja $x(t_0)$ prevesti u proizvoljno odabrano krajnje stanje $x(t_1)$ za konačno vreme $t_0 \leq t \leq t_1$.

Def: Sistem je potpuno opservabilan ukoliko je moguće odrediti bilo koje početno stanje $x(t_0)$ na bazi poznavanja ulaza *u(t)* i posmatranja izlaza *c(t)* u toku konačnog vremenskog intervala $t_0 \leq t \leq t_1$.

9.4.1. Oceniti kontrolabilnost električnog kola ako se za promenljive stanja usvoje naponi na kondenzatorima.



Rešenje:

$$C_1 = C_2 = C \qquad C\frac{dU_C}{dt} = I_C$$

$$\left.\begin{matrix} U_{C1} + RI_{C1} = U \\ U_{C2} + RI_{C2} = U \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} I_{C1} = -\dfrac{U_{C1}}{R} + \dfrac{U}{R} \\ I_{C2} = -\dfrac{U_{C2}}{R} + \dfrac{U}{R} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} C\dfrac{dU_{C1}}{dt} = -\dfrac{U_{C1}}{R} + \dfrac{U}{R} \\ C\dfrac{dU_{C2}}{dt} = -\dfrac{U_{C2}}{R} + \dfrac{U}{R} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} U_{C1} = x_1 \\ U_{C1} = x_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{RC}x_1 + \dfrac{1}{RC}U \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{RC}x_2 + \dfrac{1}{RC}U \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{RC} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{RC} \\ \dfrac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

Sada određujemo matricu kontrolabilnosti Q_c. Uslov potpune kontrolabilnosti sistema je $rang\left(Q_c\right) = n$.

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$rang\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n \; ; \quad \text{gde je } n \text{ red sistema}$$

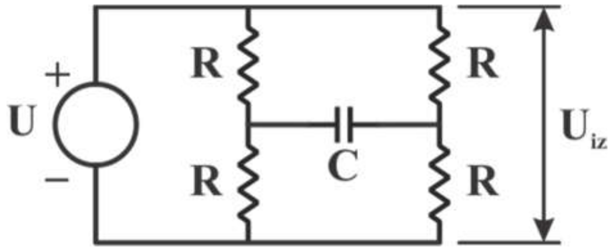
$$n = 2 \Rightarrow \quad Q_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{RC} & -\dfrac{1}{(RC)^2} \\ \dfrac{1}{RC} & -\dfrac{1}{(RC)^2} \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \frac{1}{RC} \neq 0 \quad D_{22} = -\frac{1}{RC}\frac{1}{(RC)^2} - \left(-\frac{1}{RC}\frac{1}{(RC)^2}\right) = 0$$

$$rang\left(Q_c\right) = 1$$

Sistem nije potpuno kontrolabilan što se može videti električne šeme. Kolo ima dva identična otpornika i kondenzatora zbog čega koordinate stanja ne mogu biti nezavisno upravljane jer uvek važi: $x_1 = x_2$.

9.4.2. Oceniti opservabilnost električnog kola sa slike ako se kao promenljiva stanja usvoji napon na kontenzatoru.



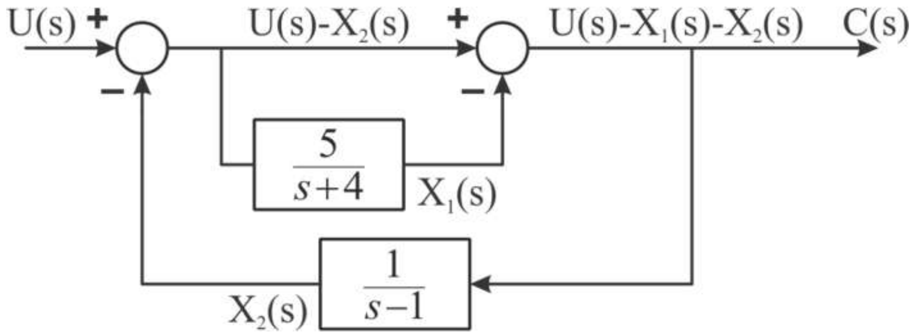
Rešenje: Sa slike se može videti da izlaz sistema ne zavisi od koordinata stanja te se merenjem izlaza ne može utvrditi stanje sistema što znači da sistem nije opservabilan.

Ovo je moguće proveriti matricom opservabilnosti Q_o. Uslov potpune opservabilnosti sistema je $rang\left(Q_o\right)=n$.

$$Q_o=\begin{bmatrix} D^T & A^T D^T & \dots & \left(A^T\right)^{n-1} D^T \end{bmatrix}$$

$$rang\begin{bmatrix} D^T & A^T D^T & \dots & \left(A^T\right)^{n-1} D^T \end{bmatrix}=n\text{ ; gde je } n \text{ red sistema}$$

9.4.3. Ispitati da li je sistem sa slike potpuno kontrolabilan i opservabilan.



Rešenje: Prvo biramo koordinate stanja:

$$\left.\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{5}{s+4}\left[U(s)-X_2(s)\right] \\ X_2(s) &= \frac{1}{s-1}C(s) \\ C(s) &= -X_1(s)-X_2(s)+U(s) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} sX_1(s)+4X_1(s) &= -5X_2(s)+5U(s) \\ sX_2(s)-X_2(s) &= -X_1(s)-X_2(s)+U(s) \end{aligned}$$

$$\dot{x}_1 = -4x_1 - 5x_2 + 5u$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + u$$
$$c = -x_1 - x_2 + u$$
$$A = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \quad H = [1]$$

Kontrolabilnost:

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -25 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \quad D_{11} = 5 \neq 0 \quad D_{22} = -25 + 25 = 0$$

$rang(Q_c) = 1 \neq 2 \neq n \Rightarrow$ Sistem nije potpuno kontrolabilan.

Opservabilnost:

$$Q_o = \begin{bmatrix} D^T & A^T D^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad D_{11} = -1 \neq 0 \quad D_{22} = -5 + 5 = 0$$

$rang(Q_o) = 1 \neq 2 \neq n \Rightarrow$ Sistem nije potpuno opservabilan.

Drugi način za ispitivanje kontrolabilnosti i opservabilnosti sistema je preko funkcija prenosa.

Kontrolabilnost: Sistem je potpuno kontrolabilan ukoliko u matrici funkcije prenosa *$G_1(s)$* ne dolazi do skraćivanja polova u imeniocu pri čemu je: $G_1(s) = (sI - A)^{-1} B = \dfrac{X(s)}{U(s)}$.

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+4 & 5 \\ 1 & s \end{bmatrix} \quad (sI - A)^{-1} B = \frac{1}{(s-1)(s+5)} \begin{bmatrix} 5(s-1) \\ s-1 \end{bmatrix}$$

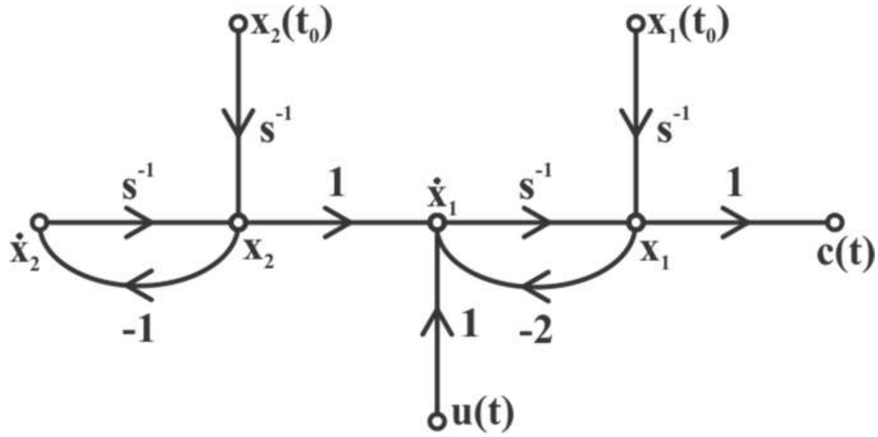
Ima skraćivanja polova što znači da sistem nije potpuno kontrolabilan.

Opservabilnost: Sistem je potpuno opservabilan ukoliko u matrici funkcije prenosa *$G_2(s)$* ne dolazi do skraćivanja polova u imeniocu pri čemu je: $G_2(s) = D(sI - A)^{-1} = \dfrac{C(s)}{U(s)}$.

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+4 & 5 \\ 1 & s \end{bmatrix} \quad D(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s+5)} \begin{bmatrix} -(s-1) & -5(s-1) \end{bmatrix}$$

Ima skraćivanja polova što znači da sistem nije potpuno opservabilan.

9.4.4. Ispitati potpunu kontrolabilnost sistema koji je opisan sledećim grafom toka signala.



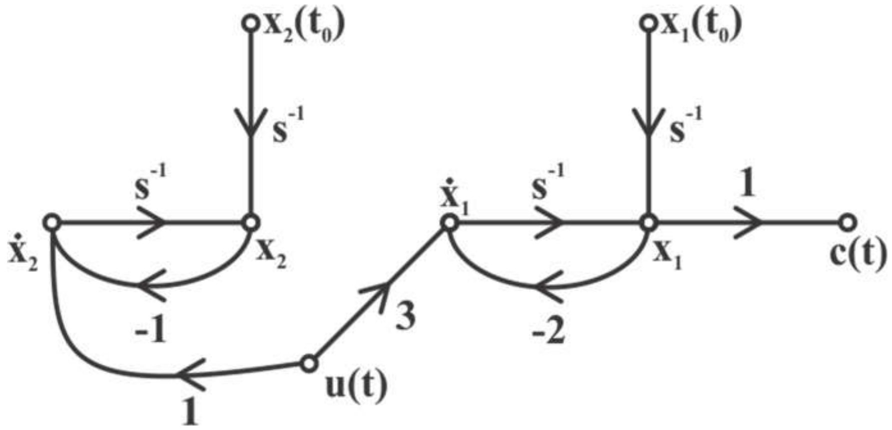
Rešenje:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \\ c &= x_1\end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad rang\left(Q_c\right) = 1 \neq n$$

Sistem nije potpuno kontrolabilan. Ovo se može videti direknto sa grafa jer ne postoji putanja od ulaza do stanja x_2.

9.4.5. Ispitati potpunu opservabilnost sistema koji je opisan sledećim grafom toka signala.



Rešenje:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + 3u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u \\ c &= x_1\end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} D^T & A^T D^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad rang\left(Q_o\right) = 1 \neq n$$

Sistem nije potpuno opservabilan. Ovo se može videti direknto sa grafa jer ne postoji putanja od stanja x_2 do izlaza sistema.

9.4.6. Ispitati da li je sistem čije su matrice opisa u prostoru stanja date sa: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $H = 0$ potpuno kontrolabilan i opservabilan i izvršiti proveru pomoću odgovarajućih funkcija prenosa. U slučaju da uslovi potpune kontrolabilnosti i opservabilnosti nisu ispunjeni, svesti sistem na dijagonalnu formu i naći koja stanja nisu kontrolabilna, odnosno opservabilna.

Rešenje:

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -7 \\ 1 & -7 & 13 \\ -1 & 4 & -10 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} & D_{11} = -1 \neq 0 \\ & D_{22} = 7 - 1 = 6 \neq 0 \\ & D_{33} = 0 \Rightarrow rang\left(Q_c\right) = 2 \neq 3 = n \end{aligned}$$

Sistem nije potpuno kontrolabilan.

$$Q_o = \begin{bmatrix} D^T & A^T D^T & \left(A^T\right)^2 D^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -14 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} & D_{11} = -2 \neq 0 \\ & D_{22} = 4 - 5 = 1 \neq 0 \\ & D_{33} = 0 \Rightarrow rang\left(Q_o\right) = 2 \neq 3 = n \end{aligned}$$

Sistem nije potpuno opservabilan.

Provera preko funkcije prenosa:

Kontrolabilnost:

$$\left(sI - A\right)^{-1} = \frac{1}{\left(s+1\right)\left(s-2\right)\left(s+3\right)} \begin{bmatrix} s\left(s+2\right) & s+2 & 2 \\ 5s+6 & s\left(s+2\right) & 2s \\ 2s & -2 & s^2-5 \end{bmatrix}$$

$$\left(sI - A\right)^{-1} B = \frac{1}{\left(s+1\right)\left(s-2\right)\left(s+3\right)} \begin{bmatrix} -s^2 - s \\ s^2 - 5s - 6 \\ -s^2 - 2s + 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\cancel{\left(s+1\right)}\left(s-2\right)\cancel{\left(s+3\right)}} \begin{bmatrix} -s\cancel{\left(s+1\right)} \\ \cancel{\left(s+1\right)}\left(s-6\right) \\ -\left(s-1\right)\cancel{\left(s+3\right)} \end{bmatrix}$$

Sistem nije potpuno kontrolabilan.

Opservabilnost:

$$D\left(sI - A\right)^{-1} = \frac{1}{\left(s+1\right)\left(s-2\right)\left(s+3\right)} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\left(s+2\right) & s+2 & 2 \\ 5s+6 & s\left(s+2\right) & 2s \\ 2s & -2 & s^2-5 \end{bmatrix}$$

$$D\left(sI - A\right)^{-1} = \frac{1}{\left(s+1\right)\left(s-2\right)\left(s+3\right)} \begin{bmatrix} -2s^2 + s + 6 & s^2 - 4 & 2s - 4 \end{bmatrix}$$

$$D\left(sI - A\right)^{-1} = \frac{1}{\left(s+1\right)\cancel{\left(s-2\right)}\left(s+3\right)} \begin{bmatrix} -\cancel{\left(s-2\right)}\left(2s+3\right) & \cancel{\left(s-2\right)}\left(s+2\right) & 2\cancel{\left(s-2\right)} \end{bmatrix}$$

Sistem nije potpuno opservabilan.

Svođenje na dijagonalnu formu:

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1;\ \lambda_2 = 2;\ \lambda_3 = -3;$$

$$AP = P\hat{A} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

prilikom rešavanja sistema jednačina biramo $p_{11} = 1$, i dobijamo $p_{12} = -2$ i $p_{13} = 1$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 8 & 4 & 2 \\ -9 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ -0.6 \end{bmatrix}; \quad \hat{D} = DP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Možemo primetiti da postoji nula vrsta u $\hat{B}$ što znači da sistem nije potpuno kontrolabilan jer ne postoji veza između ulaza *u(t)* i stanja $\dot{x}_1(t)$. Ovo znači da stanje $x_1(t)$ nije kontrolabilno stanje.

Možemo primetiti da postoji nula kolona u $\hat{D}$ što znači da sistem nije potpuno kontrolabilan jer ne postoji veza između stanja $x_2(t)$ i izlaza *c(t)*. Ovo znači da stanje $x_2(t)$ nije opservabilno stanje.

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ -0.6 \end{bmatrix}u; \quad c = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}\hat{x}$$