Параметарска оптимизација

(1) Динамичко понашање система је описано моделом у простору стања

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b\, u(t), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

У систему са затвореном повратном спрегом по стању $u(t) = -Kx(t) = -k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t)$. Одредити појачања k_1 и k_2 тако да индекс перформансе $J = \int_0^\infty [x^T x + u^T u]\, dt$ буде минималан ако је управљање без ограничења.

решење:

$$u(t) = -Kx(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = (A - bK)\, x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = A_1 x(t)$$

облик погодан за параметарску оптимизацију $A_1 = A - bK$

$$J = \int_0^\infty [x^T x + u^T u]\, dt = \int_0^\infty [x^T x + x^T K^T K x]\, dt = \int_0^\infty x^T [I + K^T K] x\, dt = \int_0^\infty x^T Q_1 x\, dt$$

облик критеријума већ је погодан за пар. оптимизацију $J = \int_0^\infty x^T Q_1 x\, dt, \quad Q_1 = I + K^T K$

Затворени систем треба бити стабилан $\Rightarrow$ $\det(sI - A_1) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ k_1 & s + k_2 \end{vmatrix} = s^2 + k_2 s + k_1$

услов стабилности (по Хурвицу) $k_1, k_2 > 0$

$\Rightarrow$ систем поседује в-ју Љапунова $V(x) = x^T S x$, S – реална, позитивно дефинитна симетрична матрица ($S^T = S$, $S > 0$)

$$A_1^T S + S A_1 = -Q_1, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 + k_1^2 & k_1 k_2 \\ k_1 k_2 & 1 + k_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow J = x^T(0)\, S\, x(0)$$

$$= s_{11} x_1^2(0) + 2 s_{12} x_1(0) x_2(0) + s_{22} x_2^2(0)$$

$$\left.\begin{aligned} -2k_1 s_{12} &= -1 - k_1^2 \\ s_{11} - k_2 s_{12} - k_1 s_{22} &= -k_1 k_2 \\ 2(s_{12} - k_2 s_{22}) &= -1 - k_2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad s_{12} = \frac{1 + k_1^2}{2k_1}, \quad s_{22} = \frac{1 + k_1^2 + k_1 + k_1 k_2^2}{2 k_1 k_2}, \quad s_{11} = \frac{k_1 + k_1^2 + k_1^3 + k_2^2}{2 k_1 k_2}$$

$$J = s_{11} \cdot c^2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial k_1} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial s_{11}}{\partial k_1} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial k_2} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial s_{11}}{\partial k_2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad k_1 = 1, \quad k_2 = \sqrt{3} \quad (k_1, k_2 > 0)$$

$$\frac{\partial J}{\partial k_2} = \frac{1}{k_1} - \frac{k_1 + k_1^2 + k_1^3 + k_2^2}{2 k_1 k_2^2} = 0 \;; \quad \frac{\partial J}{\partial k_1} = \frac{1 + 2k_1 + 3k_1^2}{2 k_1 k_2} - \frac{k_1 + k_1^2 + k_1^3 + k_2^2}{2 k_1^2 k_2} = 0$$

решења $\{k_1, k_2\} = \{-1, -j\}\;;\; \{-1, j\}\;;\; \{1, -\sqrt{3}\}\;;\; \{1, \sqrt{3}\}$

$$\perp \qquad \perp \qquad \perp \qquad \top$$

② Динамичко понашање система описано је диференцијалном ј-ном $\ddot{x} = -bx - a\dot{x}$, $b\,(>0)$ - дато. Почетно стање система је познато $x(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Одредити вредност параметра a, тако да индекс перформансе $J = \int_0^{\infty} x^T(t)\, Q\, x(t)\, dt$ (Q - позитивно дефинитна реална симетрична матрица) буде минималан.

Решење: $\ddot{x} = -bx - a\dot{x}$, $b>0$ - дато $\quad x(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$J = \int_0^{\infty} x^T(t)\, Q\, x(t)\, dt, \quad Q^T = Q > 0 \quad Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \text{ - дато}$$

позитивна дефинитност $\quad q_{11} > 0 \ \wedge \ q_{11} q_{12} - q_{12}^2 > 0 \ \Rightarrow \ q_{22} > 0$

модел у простору стања

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -b x_1 - a x_2 \end{aligned} \qquad \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1(0) &= 1 \\ x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

провера стабилности : $\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ b & s+a \end{vmatrix} = s(s+a) + b = s^2 + as + b$

услов стабилности $\quad a, b > 0$

Ј-на Љапунова: $\quad A^T S + SA = -Q, \quad S^T = S > 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2b s_{12} & s_{11} - a s_{12} - b s_{22} \\ s_{11} - a s_{12} - b s_{22} & 2(s_{12} - a s_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_{11} & -q_{12} \\ -q_{12} & -q_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -2b s_{12} &= -q_{11} \\ s_{11} - a s_{12} - b s_{22} &= -q_{12} \\ 2(s_{12} - a s_{22}) &= -q_{22} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} s_{12} &= \frac{q_{11}}{2b} \\ s_{22} &= \frac{q_{11}}{2ab} + \frac{q_{22}}{2a} = \frac{1}{2a}\left(\frac{q_{11}}{b} + q_{22}\right) \\ s_{11} &= \frac{a}{2b} q_{11} + \frac{b}{2a}\left(\frac{q_{11}}{b} + q_{22}\right) - q_{12} = \frac{a^2 + b}{2ab} q_{11} - q_{12} + \frac{b}{2a} q_{22} \end{aligned}$$

$$J = x^T(0)\, S\, x(0) = s_{11} = \left(\frac{a}{2b} + \frac{1}{2a}\right) q_{11} - q_{12} + \frac{b}{2a} q_{22}$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2b} - \frac{1}{2a^2}\right) q_{11} - \frac{b}{2a^2} q_{22} = 0 \quad \Rightarrow a^2 = \frac{b(q_{11} + b q_{22})}{q_{11}}$$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{b + b^2 \frac{q_{22}}{q_{11}}}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial a^2} = \frac{q_{11} + b q_{22}}{a^3} = \frac{q_{11} + b q_{22}}{a^2 \cdot a} = \frac{q_{11} + b q_{22}}{q_{11} + b q_{22}} \frac{b}{q_{11}} \sqrt{\frac{q_{11}}{b(q_{11} + b q_{22})}}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial a^2} = \sqrt{\frac{b}{q_{11}(q_{11} + b q_{22})}} > 0 \quad \Rightarrow \quad J = J_{min}$$

③ Динамичко понашање систем описано је диференцијалном ј-ном облика 2.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$
$$\dot{x}_3(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) - a\,x_3(t)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Одредити вредност параметра $a\ (>0)$ тако да индекс перформансе

$$J = \int_0^{\infty} x^T(t)\, x(t)\, dt$$ буде минималан. Наћи J_{min}

решење: $\dot{x} = Ax$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -a \end{bmatrix}$

провера (услови) стабилности $\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+a \end{vmatrix} = s^3 + as^2 + 2s + 1$

$a_3 = 1,\ a_2 = a,\ a_1 = 2,\ a_0 = 1$

Хурвицов критеријум

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= a > 0 \\ \Delta_2 &= 2a - 1 > 0 \\ \Delta_3 &= 1 \cdot \Delta_2 = 2a - 1 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &> 0 \\ a &> 1/2 \end{aligned} \Rightarrow a > 1/2$$

$A^T S + SA = -Q$, $Q = I$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -a \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) $-2s_{13} = -1$
2) $s_{11} - 2s_{13} - s_{23} = 0$
3) $s_{12} - a s_{13} - s_{33} = 0$
4) $2s_{12} - 4s_{23} = -1$
5) $s_{13} + s_{22} - a s_{23} - 2s_{33} = 0$
6) $2s_{23} - 2a\,s_{33} = -1$

$$s_{11} = \frac{a^2 + 5a - 1}{2(2a-1)} \qquad s_{12} = \frac{2a^2 + 3}{2(2a-1)} \qquad s_{13} = \frac{1}{2}$$

$$s_{22} = \frac{a^3 + a^2 + a + 7}{2(2a-1)} \qquad s_{23} = \frac{a^2 + a + 1}{2(2a-1)} \qquad s_{33} = \frac{a+3}{2(2a-1)}$$

$$J = x^T(0)\, S\, x(0) = s_{11} x_1^2(0) = \frac{a^2 + 5a - 1}{2(2a-1)}\, x_1^2(0)$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{2a^2 - 2a - 3}{2(2a-1)^2}\, x_1^2(0) = 0 \Rightarrow 2a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= \frac{1-\sqrt{7}}{2} = -0{,}8229 \\ a_2 &= \frac{1+\sqrt{7}}{2} = 1{,}8229 \end{aligned}$$

$a > 0 \Rightarrow a = 1{,}8229$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a}\, \frac{2a^2 - 2a - 3}{2(2a-1)^2}\, x_1^2(0) = \frac{7}{(2a-1)^3}\, x_1^2(0) > 0 \Rightarrow J = J_{min}$$

$$J_{min}\Big|_{a = 1{,}8229} = 2{,}16144\, x_1^2(0)$$