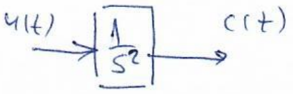
$\boxed{\text{Задатак: 1}}$ а) Извршити синтезу континуалног линеарног регулатора у повратној спрези по стању система приказаног на слици тако да критеријумска ф-ја

$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[c^2(t) + r u^2(t)\right] dt$, $r>0$, буде минимална при сваком стању система



б) За посматрани систем пројектовати обсервер идентитета тако да карактеристична једначина обсервера поседује задати скуп корена $\{-3, -3\}$

в) Нацртати симулациони дијаграм система са обсервером и регулатором у повратној спрези ако је $r=4$

$\boxed{\text{Решење: 1}}$ а)

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t), \quad c(t) = x_1(t) \Rightarrow \dot{x} = Ax + bu, \quad c = dx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[x_1^2(t) + r u^2(t)\right] dt \qquad J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[x^T Q x + u^T R u\right] dt$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad R = r > 0$$

$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1} b^T S x(t)$, S – решење, симетрична позитивно дефинитна

услов $(A-BK)$ стабилна матрица се своди на услов да пар (A, Q_1) – потпуно опсервабилан, услов да пар (A,B) буде потпуно контролабилан $\quad Q = Q_1^T Q_1$

пар (A,B) контролабилност: $\text{rang}\left[b \,\vdots\, Ab\right] = \text{rang}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$ ✓

пар (A, Q_1) опсервабилност: $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = Q_1^T Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{rang}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_1 A \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \checkmark$$

Рикатијева алгебарска ј-на $A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & s_{11} \\ s_{11} & 2s_{12} \end{bmatrix} - \frac{1}{r}\begin{bmatrix} s_{12}^2 & s_{12}s_{22} \\ s_{12}s_{22} & s_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\tau} s_{12}^2 &= 0 \\ s_{11} - \frac{1}{\tau} s_{12} s_{22} &= 0 \\ 2 s_{12} - \frac{1}{\tau} s_{22}^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} s_{12}^2 &= \tau \\ s_{12} s_{22} - \tau s_{11} &= 0 \\ s_{22}^2 - 2\tau s_{12} &= 0 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow s_{12} > 0$$

позитивно дефинитна

$s_{11} > 0$

$s_{11} s_{22} - s_{12}^2 > 0 \Rightarrow s_{22} > 0$

$$s_{12} = \sqrt{\tau}$$

$$s_{22} = \sqrt{\tau \cdot s_{12} \cdot 2} = \tau^{3/4} \cdot \sqrt{2}$$

$$s_{11} = \frac{1}{\tau} s_{12} s_{22} = \tau^{1/4} \sqrt{2}$$

$$S = \begin{bmatrix} \tau^{1/4}\sqrt{2} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \tau^{3/4}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$u(t) = -R^{-1} B^T S x(t)$$

$$u(t) = -\frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{11} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\frac{s_{12}}{\tau} x_1(t) - \frac{s_{22}}{\tau} x_2(t)$$

$$\tau = 4 \Rightarrow \quad S = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad u(t) = -\frac{1}{2} x_1(t) - x_2(t)$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad A - bK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(sI - A + bK) = s^2 + s + 0{,}5$$

$$s_{1,2} = -0{,}5 \pm j0{,}5$$

б)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + l(c - \hat{c}) \qquad \hat{c}(t) = d\,\hat{x}(t)$$

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax + bu - [A\hat{x} + bu + l(c - \hat{c})] = Ae - ld \cdot e = (A - ld)e(t)$$

$$\dot{e}(t) = (A - ld)e(t) = A_c e(t)$$

карактеристични полином опсервера $\Delta = \det(sI - A_c) = \det(sI - A + ld)$

$$\cancel{\Delta} \quad sI - A + ld = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ l_2 & s \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} s + l_1 & -1 \\ l_2 & s \end{vmatrix} = s(s + l_1) + l_2 = s^2 + s l_1 + l_2$$

жељени кар. полином $\Delta = (s+3)^2 = s^2 + 6s + 9$

$$\Rightarrow \begin{aligned} l_1 &= 6 \\ l_2 &= 9 \end{aligned} \Rightarrow l = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - ld)\hat{x} + bu + lc$$

$$A - ld = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = -6\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 6c$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -9\hat{x}_1 + 9c + u$$

објекат $r = 4$ регулатор опсервер

б/ $\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = u$

$c = x_1$

$u(t) = -\frac{1}{2}\hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t)$

$\dot{\hat{x}}_1 = -6\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 6c$

$\dot{\hat{x}}_2 = -9\hat{x}_1 + 9c + u$